Musterlösung zur Prüfung Mathematik III, Frühling 08,
Dr. P. Thurnheer

1. Laut dem Satz von Gauss ist der Fluss Φ des Vektorfeldes F nach aussen durch die Oberfläche des Zylinders gleich dem Volumenintegral der Divergenz von F über den Zylinder

$$G = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Nun ist

$$\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = xz \sin y - xz \sin y + e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}.$$

Damit ist der gesuchte Fluss gleich

$$\Phi = \iiint_G e^{x^2+y^2} dxdydz.$$

In den Polarkoordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = h$, $dxdydz = rdrd\vartheta dh$, wird der Zylinder G beschrieben durch

$$\{(r, \vartheta, h) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq h \leq 3\}.$$

Somit berechnet man den Fluss als

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^3 e^{r^2} r dh d\vartheta dr = 3 \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r e^{r^2} dr = 6\pi \left(e^{r^2}/2 \right)_0^{\sqrt{2}} \\ &= 3\pi \left(e^2 - 1 \right).\end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. a)

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ 0 - y \\ z - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix},$$

und analog

$$\mathrm{rot}G(x,y,z) = \begin{pmatrix} (2+yx) - (-2+xy) \\ \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \\ yz - yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Vektoren von $\mathrm{rot}F(x,y,z)$ sind normal zur x-Achse. Die Vektoren von $\mathrm{rot}G(x,y,z)$ sind parallel zur x-Achse und konstant.

c) Laut dem Satz von Stokes ist die Arbeit des Vektorfeldes $F(x,y,z)$ resp. $G(x,y,z)$ längs eines geschlossenen Weges γ gleich dem Fluss des Feldes $\mathrm{rot}F(x,y,z)$ resp. $\mathrm{rot}G(x,y,z)$ durch eine von γ umschlossene Fläche. Der Weg γ liegt in einer Normalebene zur x-Achse. Sei S die Teilfläche dieser Normalebene, die von γ umschlossenen wird.

Die Vektoren von $\mathrm{rot}F(x,y,z)$ sind wie die Fläche S normal zur x-Achse. Somit ist der Fluss von $\mathrm{rot}F(x,y,z)$ durch die Fläche S gleich 0. Daher ist die Arbeit des Vektorfeldes $F(x,y,z)$ entlang eines solches Weges γ gleich 0.

Die Vektoren von $\mathrm{rot}G(x,y,z)$ sind parallel zur x-Achse. Somit ist der Fluss von $\mathrm{rot}G(x,y,z)$ durch S gleich dem Integral der x-Komponente von $\mathrm{rot}G(x,y,z)$ über die Fläche S. Die x-Komponente von $\mathrm{rot}G(x,y,z)$ ist aber konstant und gleich 4. Daher ist die Arbeit von $G(x,y,z)$ entlang γ gleich $4 \times$ (die Fläche von S).

d) Wir parametrisieren den Kreis k durch den Weg γ, definiert als

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Dann ist

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Die Arbeit von $G(x,y,z)$ längs k ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} < G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) > dt &= \int_0^{2\pi} \left(0 + 8(\sin t)^2 + 8(\cos t)^2\right) dt \\ &= 8 \int_0^{2\pi} dt = 4 \cdot 4\pi, \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei 4π gleich der von k umschlossenen Fläche ist.

3. Wir setzen den Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$0 = xu_x(x,t) - \frac{1}{\ln t} u_t(x,t) = xX'(x)T(t) - \frac{1}{\ln t} X(x)\dot{T}(t).$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$\frac{xX'(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{\ln(t)T(t)}.$$

Da die linke Seite nur von x abhängt und die rechte Seite nur von t, sind beide Ausdrüecke konstant. Also erhalten wir die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$xX'(x) = \lambda X(x) \tag{1}$$

und

$$\dot{T}(t) = \lambda \ln(t) T(t) \tag{2}$$

mit einer Konstanten λ. Zur Lösung dieser Differentialgleichungen schreiben wir $X' = \frac{dX}{dx}$ und $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$. (1) ergibt

$$\int \frac{dX}{X} = \lambda \int \frac{dx}{x},$$

also

$$\ln X = \lambda(\ln x + C)$$

und damit

$$X = e^{\lambda(\ln x + C)} = \tilde{C} x^{\lambda}$$

wobei C, $\tilde{C}$ Konstanten sind. (2) ergibt

$$\int \frac{dT}{T} = \lambda \int \ln t dt.$$

Partielle Integration von $1 \cdot \ln t$ liefert

$$\ln T = \lambda[t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt] = \lambda t \ln t - \lambda t + C',$$

also

$$T = \hat{C} e^{\lambda t \ln t - t\lambda} = \hat{C} t^{t\lambda} e^{-t\lambda},$$

wobei C', $\hat{C}$ Konstanten sind.